Soluție

1.a) $\det A = -5m$

b) Sistemul admite soluții nenule dacă determinantul matricei sistemului este nul, deci $m = 0$

c) Pentru $m = 0$ sistemul are soluții nebanale: $x = \lambda,\ y = 3\lambda,\ z = -5\lambda,$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Înlocuind, rezultă $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2} = \dfrac{7}{3}$.

2.a) $f(i) = b - 5 + i(a+4) = 0,$ de unde $a = -4,\ b = 5.$

b)

$$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-1)^2 = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = \left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 - 2\sum_{1\le k<j\le 4} x_k x_j - 2\sum_{k=1}^{4} x_k + 4 = 0.$$

c) Dacă polinomul are toate rădăcinile reale, ținând cont de relația obținută la punctul anterior, rezultă $(x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 = (x_3-1)^2 = (x_4-1)^2 = 0,$ deci $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$ Obținem $a = -4,\ b = 1.$